

1、概述

数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学。简单地说，就是研究数和形的科学。

由于生活和劳动上的需求，即使是最原始的民族，也知道简单的计数，并由用手指或实物计数发展到用数字计数。在中国，最迟在商代，即已出现用十进制数字表示大数的方法；至秦汉之际，即已出现完满的十进制制。在不晚于公元一世纪的《九章算术》中，已载了只有位值制才有可能进行的开平方、开立方的计算法则，并载有分数的各种运算以及解线性联立方程组的方法，还引入了负数概念。

刘徽在他注解的《九章算术》中，还提出过用十进制小数表示无理数平方根的奇零部分，但直至唐宋时期(欧洲则在16世纪斯蒂文以后)十进制小数才获通用。在这本著作中，刘徽又用圆内接正多边形的周长逼近圆周长，成为后世求圆周率的一般方法。

虽然中国从来没有过无理数或实数的一般概念，但在实质上，那时中国已完成了实数系统的一切运算法则与方法，这不仅在应用上不可缺，也为数学初期教育所不可少。至于继承了巴比伦、埃及、希腊文化的欧洲地区，则偏重于数的性质及这些性质间的逻辑关系的研究。早在欧几里得的《几何原本》中，即有素数的概念和素数个数无穷及整数惟一分解等论断。古希腊发现了有非分数的数，即现称的无理数。16世纪以来，由于解高次方程又出现了复数。在近代，数的概念更进一步抽象化，并依据数的不同运算规律，对一般的数系统进行了独立的理论探讨，形成数学中的若干不同分支。

开平方和开立方是解最简单的高次方程所必须用到的运算。在《九章算术》中，已出现解某种特殊形式的二次方程。发展至宋元时代，引进了“天元”(即未知数)的明确观念，出现了求高次方程数值解与求多至四个未知数的高次代数联立方程组的解的方法，通称为天元术与四元术。与之相伴出现的多项式的表达、运算法则以及消去方法，已接近于近世的代数学。

在中国以外，九世纪阿拉伯的花拉米子的著作阐述了二次方程的解法，通常被视为代数学的鼻祖，其解法实质上与中国古代依赖于切割术的几何方法具有同一风格。中国古代数学致力于方程的具体求解，而源于古希腊、埃及传统的欧洲数学则不同，一般致力于探究方程解的性质。

16世纪时，韦达以文字代替方程系数，引入了代数的符号演算。对代数方程解的性质进行探讨，是从线性方程组引出的行列式、矩阵、线性空间、线性变换等概念与理论的出现；从代数方程导致复数、对称函数等概念的引入以至伽罗华理论与群论的创立。而近代极为活跃的代数几何，则无非是高次联立代数方程组解所构成的集合的理论研究。

早在欧几里得的《几何原本》中，即有素数的概念和素数个数无穷及整数惟一分解等论断。古希腊发现了有非分数的数，即现称的无理数。16世纪以来，由于解高次方程又出现了复数。在近代，数的概念更进一步抽象化，并依据数的不同运算规律，对一般的数系统进行了独立的理论探讨，形成数学中的若干不同分支。

开平方和开立方是解最简单的高次方程所必须用到的运算。在《九章算术》中，已出现解某种特殊形式的二次方程。发展至宋元时代，引进了“天元”（即未知数）的明确观念，出现了求高次方程数值解与求多至四个未知数的高次代数联立方程组的解的方法，通称为天元术与四元术。与之相伴出现的多项式的表达、运算法则以及消去方法，已接近于近世的代数学。

在中国以外，九世纪阿拉伯的花拉米子的著作阐述了二次方程的解法，通常被视为代数学的鼻祖，其解法实质上与中国古代依赖于切割术的几何方法具有同一风格。中国古代数学致力于方程的具体求解，而源于古希腊、埃及传统的欧洲数学则不同，一般致力于探究方程解的性质。

16世纪时，韦达以文字代替方程系数，引入了代数的符号演算。对代数方程解的性质进行探讨，是从线性方程组引出的行列式、矩阵、线性空间、线性变换等概念与理论的出现；从代数方程导致复数、对称函数等概念的引入以至伽罗华理论与群论的创立。而近代极为活跃的代数几何，则无非是高次联立代数方程组解所构成的集合的理论研究。

形的研究属于几何学的范畴。古代民族都具有形的简单概念，并往往以图画来表示，而图形之所以成为数学对象是由于工具的制作与测量的要求所促成的。规矩以作圆方，中国古代夏禹泊水时即已有规、矩、准、绳等测量工具。

《墨经》中对一系列的几何概念，有抽象概括，作出了科学的定义。《周髀算经》与刘徽的《海岛算经》给出了用矩观测天地的一般方法与具体公式。在《九章算术》及刘徽注解的《九章算术》中，除勾股定理外，还提出了若干一般原理以解决多种问题。例如求任意多边形面积的出入相补原理；求多面体的体积的阳马鳖需的二比一原理（刘徽原理）；5世纪祖（日恒）提出的用以求曲面体积特别是球的体积的“幂势既同则积不容异”的原理；还有以内接正多边形逼近圆周长的极限方法（割圆术）。但自五代（约10世纪）以后，中国在几何学方面的建树不多。

中国几何学以测量和计算面积、体积的量度为中心任务，而古希腊的传统则是重视形的性质与各种性质间的相互关系。欧几里得的《几何原本》，建立了用定义、公理、定理、证明构成的演绎体系，成为近代数学公理化的楷模，影响遍及于整个数学的发展。特别是平行公理的研究，导致了19世纪非欧几何的产生。

欧洲自文艺复兴时期起通过对绘画的透视关系的研究，出现了射影几何。18世纪，蒙日应用分析方法对形进行研究，开微分几何学的先河。高斯的曲面论与黎曼的流形理论开创了脱离周围空间以形作为独立对象的研究方法；19世纪克莱因以群的观点对几何学进行统一处理。此外，如康托尔的点集理论，扩

大了形的范围；庞加莱创立了拓扑学，使形的连续性成为几何研究的对象。这些都使几何学面目一新。

在现实世界中，数与形，如影之随形，难以分割。中国的古代数学反映了这一客观实际，数与形从来就是相辅相成，并行发展的。例如勾股测量提出了开平方的要求，而开平方、开立方的方法又奠基于几何图形的考虑。二次、三次方程的产生，也大都来自几何与实际问题。至宋元时代，由于天元概念与相当于多项式概念的引入，出现了几何代数化。

在天文与地理中的星表与地图的绘制，已用数来表示地点，不过并未发展到坐标几何的地步。在欧洲，十四世纪奥尔斯姆的著作中已有关于经纬度与函数图形表示的萌芽。十七世纪笛卡尔提出了系统的把几何事物用代数表示的方法及其应用。在其启迪之下，经莱布尼茨、牛顿等的工作，发展成了现代形式的坐标制解析几何学，使数与形的统一更臻完美，不仅改变了几何证题过去遵循欧几里得几何的老方法，还引起了导数的产生，成为微积分学产生的根源。这是数学史上的一件大事。

在十七世纪中，由于科学与技术上的要求促使数学家们研究运动与变化，包括量的变化与形的变换(如投影)，还产生了函数概念和无穷小分析即现在的微积分，使数学从此进入了一个研究变量的新时代。

十八世纪以来，以解析几何与微积分这两个有力工具的创立为契机，数学以空前的规模迅猛发展，出现了无数分支。由于自然界的客观规律大多是以微分方程的形式表现的，所以微分方程的研究一开始就受到很大的重视。

微分几何基本上与微积分同时诞生，高斯与黎曼的工作又产生了现代的微分几何。19、20世纪之交，庞加莱创立了拓扑学，开辟了对连续现象进行定性与整体研究的途径。对客观世界中随机现象的分析，产生了概率论。第二次世界大战军事上的需要，以及大工业与管理的复杂化产生了运筹学、系统论、控制论、数理统计学等学科。实际问题要求具体的数值解答，产生了计算数学。选择最优途径的要求又产生了各种优化的理论、方法。

力学、物理学同数学的发展始终是互相影响互相促进的，特别是相对论与量子力学推动了微分几何与泛函分析的成长。此外在19世纪还只用到一次方程的化学和几乎与数学无缘的生物学，都已要用到最前沿的一些数学知识。

十九世纪后期，出现了集合论，还进入了一个批判性的时代，由此推动了数理逻辑的形成与发展，也产生了把数学看作是一个整体的各种思潮和数学基础学派。特别是1900年，德国数学家希尔伯特在第二届国际数学家大会上的关于当代数学重要问题的演讲，以及三十年代开拓的，以结构概念统观数学的法国布尔巴基学派的兴起，对二十世纪数学的发展产生了巨大、深远的影响，科学的数学化一语也开始为人们所乐道。

数学的外围向自然科学、工程技术甚至社会科学不断渗透扩大并从中吸取营养，出现了一些边缘数学。数学本身的内部需要也孳生了不少新的理论与分支。同时其核心部分也在不断巩固提高并有时作适当调整以适应外部需要。总之，数学这棵大树茁壮成长，既枝叶繁茂又根深蒂固。

在数学的蓬勃发展过程中,数与形的概念不断扩大且日趋抽象化,以至于不再有任何原始计数与简单图形的踪影。虽然如此,在新的数学分支中仍有着一些对象和运算关系借助于几何术语来表示。如把函数看成是某种空间的一个点之类。这种做法之所以行之有效,归根结底还是因为数学家们已经熟悉了那种简易的数学运算与图形关系,而后者又有着长期深厚的现实基础。而且,即使是最原始的数字如1、2、3、4,以及几何形象如点与直线,也已经是经过人们高度抽象化了的观念。因此如果把数与形作为广义的抽象概念来理解,则前面提到的把数学作为研究数与形的科学这一定义,对于现阶段的近代数学,也是适用的。

由于数学研究对象的数量关系与空间形式都来自现实世界,因而数学尽管在形式上具有高度的抽象性,而实质上总是扎根于现实世界的。生活实践与技术需要始终是数学的真正源泉,反过来,数学对改造世界的实践又起着重要的、关键性的作用。理论上的丰富提高与应用的广泛深入在数学史上始终是相伴相生,相互促进的。

但由于各民族各地区的客观条件不同,数学的具体发展过程是有差异的。大体说来,古代中华民族以竹为筹,以筹运算,自然地导致十进位值制的产生。计算方法的优越有助于对实际问题的具体解决。由此发展起来的数学形成了一个以构造性、计算性、程序化与机械化为其特征,以从问题出发进而解决问题为主要目标的独特体系。而在古希腊则着重思维,追求对宇宙的了解。由此发展成以抽象了的数学概念与性质及其相互间的逻辑依存关系为研究对象的公理化演绎体系。

中国的数学体系在宋元时期达到高峰以后,陷于停顿且几至消失。而在欧洲,经过文艺复兴、宗教革命、资产阶级革命等一系列的变革,导致了工业革命与技术革命。机器的使用,不论中外都由来已久。但在中国,则由于明初被帝王斥为奇技淫巧而受阻抑。

在欧洲,则由于工商业的发展与航海的刺激而得到发展,机器使人们从繁重的体力劳动中解放出来,并引导到理论力学和一般的运动和变化的科学研究。当时的数学家都积极参与了这些变革以及相应数学问题的解决,产生了积极的效果。解析几何与微积分的诞生,成为数学发展的一个转折点。17世纪以来数学的飞跃,大体上可以看成是这些成果的延续与发展。

20世纪出现各种崭新的技术,产生了新的技术革命,特别是计算机的出现,使数学又面临一个新时代。这一时代的特点之一就是部分脑力劳动的逐步机械化。与17世纪以来数学之以围绕连续、极限等概念为主导思想与方法不同,由于计算机研制与应用的需要,离散数学与组合数学开始受到重视。

计算机对数学的作用已不限于数值计算,符号运算的重要性日趋明显(包括机器证明等数学研究)。计算机还广泛应用于科学实验。为了与计算机更好地配合,数学对于构造性、计算性、程序化与机械化的要求也显得颇为突出。代数几何是一门高度抽象化的数学,最近出现的计算性代数几何与构造性代数几何的提法,即其端倪之一。总之,数学正随着新的技术革命而不断发展。

早在欧几里得的《几何原本》中，即有素数的概念和素数个数无穷及整数惟一分解等论断。古希腊发现了有非分数的数，即现称的无理数。

16世纪以来，由于解高次方程又出现了复数。在近代，数的概念更进一步抽象化，并依据数的不同运算规律，对一般的数系统进行了独立的理论探讨，形成数学中的若干不同分支。

开平方和开立方是解最简单的高次方程所必须用到的运算。在《九章算术》中，已出现解某种特殊形式的二次方程。发展至宋元时代，引进了“天元”（即未知数）的明确观念，出现了求高次方程数值解与求多至四个未知数的高次代数联立方程组的解的方法，通称为天元术与四元术。与之相伴出现的多项式的表达、运算法则以及消去方法，已接近于近世的代数学。

在中国以外，九世纪阿拉伯的花拉米子的著作阐述了二次方程的解法，通常被视为代数学的鼻祖，其解法实质上与中国古代依赖于切割术的几何方法具有同一风格。中国古代数学致力于方程的具体求解，而源于古希腊、埃及传统的欧洲数学则不同，一般致力于探究方程解的性质。

16世纪时，韦达以文字代替方程系数，引入了代数的符号演算。对代数方程解的性质进行探讨，是从线性方程组引出的行列式、矩阵、线性空间、线性变换等概念与理论的出现；从代数方程导致复数、对称函数等概念的引入以至伽罗华理论与群论的创立。而近代极为活跃的代数几何，则无非是高次联立代数方程组解所构成的集合的理论研究。形的研究属于几何学的范畴。古代民族都具有形的简单概念，并往往以图画来表示，而图形之所以成为数学对象是由于工具的制作与测量的要求所促成的。规矩以作圆方，中国古代夏禹泊水时即已有规、矩、准、绳等测量工具。

《墨经》中对一系列的几何概念，有抽象概括，作出了科学的定义。《周髀算经》与刘徽的《海岛算经》给出了用矩观测天地的一般方法与具体公式。在《九章算术》及刘徽注解的《九章算术》中，除勾股定理外，还提出了若干一般原理以解决多种问题。例如求任意多边形面积的出入相补原理；求多面体的体积的阳马鳖需的二比一原理（刘徽原理）；5世纪祖（日恒）提出的用以求曲面体积特别是球的体积的“幂势既同则积不容异”的原理；还有以内接正多边形逼近圆周长的极限方法（割圆术）。但自五代（约10世纪）以后，中国在几何学方面的建树不多。