7、十八世纪的数学

将微积分学深入发展，是十八世纪数学的主流。这种发展是与广泛的应用紧密交织在一起的，并且刺激和推动了许多新分支的产生，使数学分析形成了在观念和方法上都具有鲜明特点的独立的数学领域。在十八世纪特别是后期，数学研究活动和数学教育方式也发生了变革。这一切使十八世纪成为向现代数学过渡的重要时期。

微积分学的发展

在十八世纪，无限小算法的推广，在英国和欧洲大陆国家是循着不同的路线进行的。不列颠数学家们在剑桥、牛津、伦敦、爱丁堡等著名的大学里传授和研究牛顿的流数术，代表人有科茨、泰勒、麦克劳林、棣莫弗和斯特林等。

泰勒发现的著名公式使人们有可能通过幂级数展开来研究函数；马克劳林的《流数论》可以说是对微积分最早的系统处理，该书是为反驳伯克利主教《分析学家》一文而作，后者出于宗教的动机，对牛顿流数论中存在的无限小概念混乱提出了尖锐批评，引起了关于微积分基础的论战。

泰勒、马克劳林之后，英国数学陷入了长期停滞、僵化的状态。十八世纪初即已爆发的微积分发明权的争论，滋长了不列颠数学家们浓厚的民族保守情绪，他们囿于牛顿的传统，难以摆脱其迂回的几何手法等弱点的束缚。与此相对照，在海峡的另一边，新分析却在莱布尼茨的后继者们的推动下蓬勃发展起来。

推广莱布尼茨学说的任务，主要由他的学生、瑞士巴塞尔的雅各布第一•伯努利和约翰第一•伯努利两兄弟担当，而这方面最重大的进步则是由欧拉作出的。

欧拉于 1748 年出版了《无穷小分析引论》，这部巨著与他随后发表的《微分学》、《积分学》标志着微积分历史上的一个转折：以往的数学家们都以曲线作为微积分的主要研究对象，而欧拉则第一次把函数放到了中心的 地位，并且是建立在函数的微分的基础之上。函数概念本身正是由于欧拉等人的研究而大大丰富了。数学家们开始明确区分代数函数与超越函数、隐函数与显函数、单值函数与多值函数等；通过一些困难积分问题的求解，诸如 B 函数、椭圆不定积分等一系列新的超越函数被纳入函数的范畴；已有的对数、指数和三角函数的研究不仅进一步系统化，而且被推广到复数领域。

在十八世纪，数学家们对于函数、导数、微分、连续性和级数收敛性等概念还没有形成统一的见解，他们往往不顾基础问题的薄弱而大胆前进。尽管如此，许多人对建立微积分的严格基础仍作出了重要的尝试。除了欧拉的函数理

论外，另一位天才的分析大师拉格朗日采取了所谓“代数的途径”。他在 1797 年出版的《解析函数论》一书中，主张用泰勒级数来定义导数，并以此作为整个微分、积分理论之出发点。

达朗贝尔则发展了牛顿的“首末比方法”，但用极限的概念代替了含糊的“最初与最终比”的说法。如果说欧拉和拉格朗日的著作引入了分析的形式化趋势，那么，达朗贝尔则为微积分的严格表述提供了合理的内核。19 世纪的严格化运动，正是这些不同方向融会发展的结果。

数学与力学开始结合

数学同力学的有机结合，是十八世纪数学的另一个鲜明特征。这种结合，其紧密的程度为数学史上任何时期所不能比拟。几乎所有的数学家都以巨大的热情，致力于运用微积分新工具去解决各种物理、力学问题。

欧拉的名字同流体力学和刚体运动的基本方程联系着；拉格朗日最享盛名的著作《分析力学》，“将力学变成了分析的一个分支”；拉普拉斯则把数学看作是研究力学天文学的工具，他的许多重要数学成果正是包含在他的五大卷《天体力学》中。

这种广泛的应用成为新的数学思想的源泉，而使数学本身的发展大大受惠。一系列新的数学分支在十八世纪成长起来。

达朗贝尔关于弦振动的著名研究，导出了弦振动方程及其最早的解，成为偏微分方程论的发端。另一类重要的偏微分方程——位势方程，主要通过对引力问题的进一步探讨而获得。与偏微分方程相联系的一些较为深入的理论问题也开始受到注意。

拉格朗日发展了解一阶偏微分方程的一般理论；对不同类型的二阶方程的研究还促使欧拉、达朗贝尔等具备了将函数展为三角级数的概念。

常微分方程的研究进展更为迅速。三体问题、摆的运动及弹性理论等的数学描述，引出了一系列的常微分方程，其中以三体问题最为重要，二阶常微分方程在其中扮演了中心角色。

数学家起先是采用各种特殊的技巧对付不同的方程，但渐渐地开始寻找带普遍性的方法。这样，欧拉推广了约翰第一·伯努利的积分因子和常数变易法；黎卡提在以他的名字命名的非线性方程的研究中，首创了后来成为处理高阶方程主要手段的降阶法；泰勒最先引起人们对奇异解存在性的注意；欧拉在 1750 年解出了一般的常系数

线性方程，他还引进超几何级数作为解二阶线性方程的基础；对全微分方程的研究亦由欧拉、拉格朗日和蒙日等开展起来。变分法起源于最速降曲线问题和相类似的一些问题，它的奠基人是欧拉。所谓“最速降曲线”问题，是要求出两点间的一条曲线，使质点在重力作用下，沿着它由一点至另一点的降落最快。这问题在 1696 年被约翰第一·伯努利提出来向其他人挑战，牛顿、洛必达和伯努利兄弟不久都分别获得了正确的解答。

欧拉自 1728 年开始以他特有的透彻精神重新考察了最速降曲线等问题，最终确立了求积分极值问题的一般方法。欧拉的方法后来又为拉格朗日所发展，拉格朗日首先将变分法置于分析的基础上，他还充分运用变分法来建造其分析力学体系，全部力学被他化归为一个统一的变分原理——虚功原理。

这些新的分支与微积分本身一起，形成了被称之为“分析”的广大领域，与代数、几何并列为数学的三大学科，在十八世纪，其繁荣程度远远超过了代数与几何。十八世纪的数学家们不仅大大拓展了分析的疆域，同时赋予它与几何相对的意义，他们力图用纯分析的手法以摆脱对于几何论证的依赖，这种倾向成为十八世纪数学的另一大特征，并且在欧拉和拉格朗日的工作中表现得最为典型。

拉格朗日在《分析力学》序中宣称：“在这本书中找不到一张图，我所叙述的方法既不需要作图，也不需要任何几何的或力学的推理，只需要统一而有规则的代数(分析)运算”。

几何与代数

对于几何学，十八世纪数学家们着眼于分析方法的应用，及与此相联系的坐标几何的发展。虽然早先已有部分结果，但微分几何形成为独立的学科主要是在十八世纪。

伯努利兄弟以及欧拉、拉格朗日等在确定平面曲线曲率、拐点、渐伸线、渐屈线、测地线及曲线簇包络等方面作出许多贡献；蒙日自 1771 年起发表的一系列工作，则使微分几何在十八世纪的发展臻于高峰。

蒙日及其学生全面概括了空间曲线的一般理论，并借着偏微分方程对已为欧拉等人触及的可展曲面、极小曲面、曲面曲率及各种曲面簇等问题获得了系统的结果。蒙日通过其几何研究还建立了偏微分方程的特征理论。现代解析几何的基本课题如对称的坐标轴概念、平面曲线的系统研究等，基本上也是十八世纪的产品。帕伦于 1705、1713 年将解析几何推广至三维情形，该项工作被克莱罗所继续。解析几何突破了笛卡儿以来作为求解几何难题的代数技巧的界限。

对综合几何的兴趣直到十八世纪末才被重新唤起，这主要归功于蒙日的《画法几何学》。蒙日指出画法几何只是投影几何的一个方面，这促进了更一般的投影几何学与几何变换理论的发展。投影几何在十九世纪整整活跃了一个世纪，而几何变换则已成为现代几何学的基本概念。

十八世纪许多数学家将分析看作代数的延伸，代数本身的研究有时便服从分析的需要。然而十八世纪代数学仍为下一世纪的革命性发展开辟了道路。

1799 年，高斯发表了关于代数基本定理的研究，给出了该定理的第一个严格证明；高于四次的代数方程用根式求解之不可能，也已被拉格朗日等人认识，拉格朗日在《方程的代数求解》一文中讨论了这个问题，虽未能作出严格证明，但却考察了根的有理函数及根的置换对它们的影响。高斯、拉格朗日的结果是 19 世纪阿贝尔、伽罗瓦、雅可比等在方程论方面的划时代成就的出发点。虚数

在十八世纪数学中的重要性增加了，达朗贝尔关于一切虚数都有形式 a+bi 的断言，被大多数同时代的学者所接受(虽然他的论证并不严格)；丹麦的韦塞尔提出了虚数的图像表示法，这一切为 19 世纪复变函数论的发展奠定了基础。

概率论进一步的发展

帕斯卡、费马和惠更斯以来，第一个对概率论给予认真注意的是雅各布第一·伯努利。他的《猜度术》一书，包含了大数律的叙述；棣莫弗最早使用正态分布曲线；拉格朗日的贡献在于误差理论。

不过，首先将概率论建立在坚固的数学基础上的是拉普拉斯。从 1771 年起，拉普拉斯发表了一系列重要著述，特别是 1812 年出版的《概率的解析理论》，对古典概率论作出了强有力的数学综合，叙述并证明了许多重要定理。拉普拉斯等人的著作还讨论了概率论对人口统计、保险事业、度量衡、天文学甚至某些法律问题的应用。概率论在十八世纪已远不再是只与赌博问题相联系的学科了。

数学教育的发展

十八世纪的数学研究活动，大部分是与欧洲各国的科学院相联系，尤其是大陆国家的科学院。它们不仅是评议研究成果，促进科学通讯，而且掌握着聘用专门成员的财政经费。

莱布尼茨 1700 年创立的柏林科学院，在普鲁士国王弗里德里克时代曾拥有欧拉和拉格朗日为院士；欧拉其余的生涯是在彼得堡科学院奉职；拉格朗日在弗里德里克死后被路易十六请到巴黎。而巴黎科学院也许是十八世纪欧洲最

重要的学术中心，与它相联系的法国最卓越的数学家还有克莱罗、达朗贝尔、孔多塞、拉普拉斯、蒙日以及勒让德等。

这种主要靠宫廷支持的科学院，在推动数学研究职业化方面起了一定的但却是有限的作用。在十八世纪的晚期，人们开始注意并努力改变大学中数学教育与研究分离、脱节的现象。

格丁根大学最先强调教学与研究的结合，但对当时的数学并未发生影响。真正的冲击来自法国。法国大革命时期建立的巴黎综合工科学校和巴黎高等师范学校，不仅提供为培养工程师和教师所必需的数学教育，对数学研究也给予同样的重视，它们作为新型的科学教育和研究机构的典范，对 19 世纪数学研究职业化运动有极大的影响。

社会政治对十八世纪数学发展的影响值得注意。十八世纪数学研究活动中心的转移，明显地与资产阶级革命中心的转移现象相吻合。英国学术界的保守气氛，同拥教保王的政治环境不无关系，而在启蒙思想熏陶下的法国学派，却自觉地接过了发展牛顿自然科学理论的任务。

法国大革命本身提供了社会变革影响数学事业的史例。这个国家当时最优

秀的数学家，几乎都被革命政权吸收到度量衡改革、教育改革、军事工程建设等活动中去。

对于数学发展特别重要的是他们在新成立的巴黎综合工科学校与巴黎高等师范学校中的作用。拉格朗日、拉普拉斯、蒙日、勒让德等均受聘出任那里的数学教授，蒙日还是综合工科学校的积极创建者并兼校长。他们的任职，使这两所学校特别是综合工科学校成为新一代数学家的摇篮，如柯西和泊松都是毕业于综合工科学校。这些学校为适应培养新人才的需要而采用的数学新教材，酿成了“教科书的革命”，其中勒让德的《几何学基础》、蒙日的《画法几何学》、拉克鲁瓦的《微积分学》以及毕奥和勒弗朗索瓦的解析几何教程，都是反复再版，并被译成了多国语言。在法国所进行的改革，到 19 世纪初即已扩及旁国特别是德国，并刺激了英国数学的复苏，成为数学发展新时代的序幕。