# 8、十九世纪的数学

十九世纪是数学史上创造精神和严格精神高度发扬的时代。复变函数论的创立和数学分析的严格化，非欧几何的问世和射影几何的完善，群论和非交换代数的诞生，是这一世纪典型的数学成就。它们所蕴含的新思想，深刻地影响着二十世纪的数学。

## 十九世纪数学发展的概貌

十八世纪数学发展的主流是微积分学的扩展，它与力学和天文学的问题紧密相联。微积分的运用使这些自然科学领域迅猛发展，至十八世纪末，它们达到了一种相对完美的程度。

然而，将数学和这些自然科学基本上视为一体的观念，使当时一些著名的数学家，如拉格朗日、欧拉、达朗贝尔等对数学的前途产生了悲观情绪，他们觉得数学泉源已近枯竭。

而实际上，此时的数学正处于兴旺发达的前夜：18 世纪的数学家忙于获取微积分的成果与应用，较少顾及其概念与方法的严密性，到十八世纪末，为微积分奠基的工作已紧迫地摆在数学家面前；另一方面，处于数学中心课题之外的数学分支已积累了一批重要问题，如复数的意义、欧式几何中平行公设的地位，高次代数方程根式解的可能性等，它们大都是从数学内部提出的课题；再者，自十八世纪后期开始，自然科学出现众多新的研究领域，如热力学、流体力学、电学、磁学、测地学等等，从数学外部给予数学以新的推动力。上述因素促成了十九世纪数学充满活力的创新与发展。

十九世纪欧洲的社会环境也为数学发展提供了适宜的舞台，法国资产阶级大革命所造成的民主精神和重视数学教育的风尚，鼓励大批有才干的青年步入数学教育和研究领地。法国在十九世纪一直是最活跃的数学中心之一，涌现出一批优秀人才，如傅里叶、泊松、彭赛列、柯西、刘维尔、伽罗华、埃尔米特、若尔当、达布、庞加莱、阿达马。他们在几乎所有的数学分支中都作出了卓越贡献。法国革命的影响波及欧洲各国，使整个学术界思想十分活跃，突破了一切禁区。

英国新一代数学家克服近一个世纪以来以牛顿为偶像的固步自封局面，成立了向欧洲大陆数学学习的“分析学会”，使英国进入世界数学发展的潮流。皮科克、格林、哈密顿、西尔维斯特、凯莱、布尔等英国数学界的杰出人物，在代数学、代数几何、数学物理方面的成就尤为突出。

德国在 1870 年统一之前，资本主义发展比较缓慢，但从十八世纪下半叶起，它一直是思想意识领域十分活跃的地区，特别是思辨哲学强调事物内部矛盾促

进事物发展的思想，对纯粹数学的发展产生了有益的影响。

从高斯登上数学舞台至十九世纪下半叶，德国逐渐发展成为与法国并驾齐驱的又一个世界数学中心，除高斯外，施陶特、普吕克、雅可比、狄利克雷、格拉斯曼、库默尔、魏尔斯特拉斯、克罗内克、黎曼、戴德金、康托尔、克莱因、希尔伯特都无愧为十九世纪最重要的数学家。

处于数学中心之外的国家和地区，也出现不少优秀学者，最突出的有挪威的阿贝尔和李，捷克的波尔查诺、俄国的罗巴切夫斯基、切比雪夫和柯瓦列夫斯卡娅，匈牙利的波尔约，意大利的贝尔特拉米和里奇等。这种人才辈出的局面在数学史上是空前的。

十九世纪数学突破分析学独占主导地位的局面，几何、代数、分析各分支出现如雨后春笋般的竟相发展。仅在十九世纪的前 30 多年中，一批二三十岁的年轻数学家就在数论、射影几何、复变函数、微分几何、非欧几何、群论等领域作出开创性的成绩。

随着众多新研究方向的开拓和证明严格化的要求，越来越多的学者开始埋头于较窄的领域作精细的研究。如阿贝尔主要从事分析与代数学研究，彭赛列专攻射影几何，伽罗瓦关心代数方程的可解性。只有高斯和柯西仍然关心科学与数学中几乎所有的问题。

在十九世纪下半叶，一些数学家注意了各分支间的联系，最著名的有克莱因的埃尔朗根纲领，在几何中引进群的观点，取得很大成功，但专门化的研究方式尚处于方兴未艾的阶段。从十九世纪晚期开始的将数学各分支奠基于公理体系之上的运动，又推进了各分支的细分，这种倾向一直延续到二十世纪。

十九世纪数学家的工作方式呈现出全新的、不同于十八世纪的特色。数学成为一项得到全社会承认的职业，数学家主要在大量培养人才的新型大学教书，研究与教学有机地联系在一起。法国的巴黎综合工科学校、巴黎高等师范大学，德国的柏林大学、格丁根大学是当时最重要的数学研究与教学中心。

由于数学家人数与成果的剧增交流思想与成果的渠道增多了，数学杂志成了重要的传播媒介。法国的热尔岗编辑出版了《纯粹与应用数学年刊》，是最早的专门数学期刊。之后，高水平的数学杂志相继问世，最著名的有克雷尔创办的德文的《纯粹与应用数学杂志》，刘维尔创办的法文的《纯粹与应用数学杂志》。

到十九世纪后半叶，随着各国数学会的问世，各种会刊及专门杂志显著增加。这些数学会还在推动本国数学发展和促进国际学术交流方面发挥积极作用。最早成立的是伦敦数学会，之后创建的有法国数学会、美国数学会和德国数学会。在接近世纪之末，由各国数学会发起在瑞士苏黎世召开了第一届国际数学家大会，后成为一项定期举行的国际学术活动。

十九世纪数学的发展错综复杂，粗略地可以分为四个阶段。

## 数论、分析与几何的创新阶段

这一阶段从十九世纪初到十九世纪二十年代。

1801 年，高斯发表《算术研究》，这部象征近代数论起点的巨著，同时也打开了数学新世纪的大门。十九世纪前的数论主要是一些漂亮但却孤立的成果，高斯一方面将这些成果系统化，对问题及方法加以分类，同时开辟了全新的课题及方法。树立了严格证明的典范，认为找出简单漂亮的证明，有助于掌握问题的实质并发现不同问题间的联系(典型的是他给出了二次互反律的七个证明)。

高斯的观点代表了十九世纪对数学严密性追求的时代精神，也指出了纯粹数学发展的一条途径。同年，高斯依据少量观测数据，运用误差分析等方法计算出谷神星的轨道，准确地预报了这颗小行星在天空出现的时刻，哄动了科学界。高斯在一生中始终对理论与应用同等重视，他的成就一直鼓舞着最有才华的数学家。他和阿基米德、牛顿一起，被认为是历史上最伟大的数学家。

1807 年，傅里叶向巴黎科学院提交了一篇关于热传导的文章，在解热传导方程时，提出任意函数可用三角级数表示。这是分析学在十九世纪的首项重要工作，它不仅使分析方法进入新的物理领域，而且扩展了函数概念，推进了偏微分方程理论。对傅里叶级数收敛点的研究，最终导致康托尔创立集合论。由于傅里叶级数在应用中的重要性，研究其收敛性成为分析严格化的动力之一。

十九世纪分析严格化的倡导者有高斯、波尔查诺、柯西、阿贝尔和狄利克雷等人。1812 年，高斯对一类具体的级数——超几何级数，进行了严密研究，这是历史上第一项重要的有关级数收敛性的工作。1817 年，波尔查诺首先抛弃无穷小量概念，用极限观念给出导数和连续性的定义，并得到判别级数收敛的一般准则(现称柯西准则)，由于他的工作长期被埋没，因此对当时数学的发展没有产生影响，是数学史上一件憾事。

柯西是对分析严格化影响最大的学者，1821 年发表了《分析教程》，除独立得到波尔查诺的基本结果，还用极限概念定义了连续函数的定积分，这是建立分析严格理论的第一部重要著作。值得注意的是，柯西的分析理论基本上基于几何直观，按现代标准衡量仍不够严密。阿贝尔一直强调分析中定理的严格证明，在 1826 年最早使用一致收敛的思想，证明了连续函数的一个一致收敛级数的和在收敛区域内部连续。柯西在建立严格的分析理论的同时，还为十九世纪最重要的数学创造——单复变函数论奠定了基础。1814～1825 年间，他得到了计算复函数沿复平面上路径积分的基本定理和留数计算公式。由于柯西的工作，复数和复变函数论在十九世纪 20 年代为广大数学家所熟悉。1826 年，阿贝尔和雅可比创立了椭圆函数理论，成为复变函数论蓬勃发展的生长点。十九世纪最富革命性的创造当属非欧几何。自古希腊时代始，欧氏几何一直被认为是客观物质空间惟一正确的理想模型，是严格推理的典范。16 世纪后的数学家在论证代数或分析结果的合理性时，都试图归之为欧氏几何问题。

但欧氏几何的平行公设曾引起数学家的持久的关注，以弄清它和其他公理、公设的关系。这个烦扰了数学家千百年的问题，终于被高斯、罗巴切夫斯基和波尔约各自独立解决。高斯在 1816 年已认识到平行公设不可能在欧氏几何其他

公理、公设的基础上证明，得到在逻辑上相容的非欧几何，其中平行公设不成立，但由于担心受人指责而未发表。

1825 年左右，波尔约和罗巴切夫斯基分别得到同样的结果，并推演了这种新几何中的一些定理。罗巴切夫斯基 1829 年的文章《论几何基础》是最早发表的非欧几何著作，因此这种几何也称为罗巴切夫斯基几何。这项发现的技术细节是简单的，但观念的变革是深刻的，欧氏几何不再是神圣的，数学家步入了创造新几何的时代。

非欧几何对人们认识物质世界的空间形式提供了有力武器，但由于它背叛传统，创立之初未受到数学界的重视。只是当高斯有关非欧几何的通信和笔记在他 1855 年去世后出版时，才因高斯的名望而引起数学家们的关注。

十九世纪前半叶最热门的几何课题是射影几何。1822 年，彭赛列发表《论图形的射影性质》，这是他 1813～1814 年被俘关在俄国时开始研究的总结。他探讨几何图形在任一投影下所有截影所共有的性质，他的方法具有象解析几何那样的普遍性。1827 年左右，普吕克等人引进齐次坐标，用代数方法研究射影性质，丰富了射影几何的内容。

对纯几何问题兴趣的增长，并未减弱分析在几何中的应用。高斯从 1816 年起参与大地测量和地图绘制工作，引起他对微分几何的兴趣。1827 年他发表的《关于曲面的一般研究》，为这一数学分支注入了全新的思想，开创了微分几何的现代研究。

## 代数观念的变革时期

代数思想的革命发生在十九世纪 30～40 年代。

1830 年，皮科克的《代数学》问世，书中对代数运算的基本法则进行了探索性研究。在这之前，代数的符号运算实际仅是实数与复数运算的翻版。皮科克试图建立一门更一般的代数，它仅是符号及其满足的某些运算法则的科学。他和德·摩根等英国学者围绕这一目标的工作，为代数结构观点的形成及代数公理化研究作了尝试，因而皮科克被誉为“代数中的欧几里得”。皮科克的目标虽然很有价值，但方法过于含糊，无法达到他的愿望。

代数中更深刻的思想来自于数学史上传奇式的人物伽罗华。在 1829～1832 年间，他提出并论证了代数方程可用根式解的普遍判别准则，从概念和方法上为最基本的一种代数结构(群)理论奠定了基础，阐明了群的正规子群及同构等重要概念。

伽罗瓦在 1832 年去世前，几次向巴黎科学院递交他的论文，均未获答复。他的理论在 1846 年由刘维尔发表之前几乎无人知晓，到十九世纪 60 年代后才引起重视，这是数学史上新思想历经磨难终放异彩的最典型的例证。

另一项引起代数观念深刻变革的成果，归功于哈密顿和格拉斯曼。哈密顿在用“数对”表示复数并探究其运算规则时，试图将复数概念推广到三维空间，未获成功，但却意想不到的创立了四元数理论，时间是 1843 年。

四元数是第一个被构造出的不满足乘法交换律的数学对象。从此，数学家便突破了实数与复数的框架，比较自由地构作各种新的代数系统。四元数理论一经问世便引来数学与物理学家的讨论，它本身虽没有广泛应用，但成为向量代数、向量分析以及线性结合代数理论的先导。1844 年，格拉斯曼在讨论 n 维几何时，独立得到更一般的具有 n 个分量的超复数理论，这一高度独创的成果由于表达晦涩，无法为当时的学者所理解。在这一时期，还诞生了代数不变量理论，这是从数论中的二次型及射影几何中的线性变换引伸出的课题。1841 年左右，凯莱受布尔的影响开始研究代数型在线性变换下的不变量。之后，寻找各种特殊型的不变量及不变量的有限基，成为十九世纪下半叶最热门的研究课题，出现了人数众多的德国学派，进而开辟了代数几何的研究领域。

数论中的重要问题，往往成为新思想发展的酵母。1844 年，库默尔在研究费马大定理时提出了理想数理论，借助理想数可证明在惟一因子分解定理不成立的代数数域中，普通数论中的某些结果仍成立。

在这代数学丰产的时期，几何、分析和数论也都有长足的进步。格林在讨论变密度椭球体的引力问题时，考虑了 n 维位势；凯莱在分析学中讨论了具有 n 个坐标的变量；格拉斯曼则直接从几何上建立高维空间理论。他们从不同角度导出超越直观的 n 维空间概念。施陶特确立了不依赖欧氏空间的长度概念的射影几何体系，从逻辑上说明射影几何比欧氏几何更基本。

分析的严格化在继续。狄利克雷按变量间对应的说法给出现代意义下的函数定义。魏尔斯特拉斯开始了将分析奠基于算术的工作，从 1842 年起采用明确的一致收敛概念于分析学，使级数理论更趋完善。

值得注意的是，未经严格证明的分析工具仍被广泛使用，在获得新结果方面显示威力。格林首先使用了位势函数的极小化积分存在的原理，即现称的狄利克雷原理，它的严格理论迟至 1904 年才为希尔伯特阐明，但是在十九世纪 50 年代就已成为黎曼研究分析学的重要工具。

随着分析工具的逐步完善，数学家开始更自觉地在数学其他分支使用它们。除微分几何外，解析数论也应运而生。1837 年，狄利克雷在证明算术序列包含无穷多素数时，精心使用了级数理论，这是近代解析数论最早的重要成果。刘维尔则在 1844 年首次证明了超越数的存在，引起数学家对寻找超越数和证明某些特殊的数为超越数的兴趣。在下半世纪，林德曼利用埃尔米特证明 e 为超越数的方法，证明了 π 的超越性，从而彻底解决了化圆为方问题。

## 数学新思想的深化阶段

这一阶段从十九世纪五十年代到十九世纪七十年代。

1851 年，黎曼的博士论文《单复变函数一般理论的基础》第一次明确了单值解析函数的定义，指出了实函数与复函数导数的基本差别，特别是阐述了现称为黎曼面的概念和共形映射定理，开创了多值函数研究的深刻方法，打通了复变函数论深入发展的道路。黎曼本人利用这一思想出色地探讨了阿贝尔积分

及其反演阿贝尔函数，1854 年，黎曼为获大学讲师资格，提交了两篇论文，其中《关于作为几何学基础的假设》是数学史上影响最深远的作品之一。

在十九世纪前半叶，数学家已认识到存在不同于欧氏几何的新几何学，并发展了内蕴几何和高维几何的理论，但它们处于分散与孤立的状态。黎曼以其深刻的洞察力将三者统一于 n 维流形的理论，开始了现代微分几何学研究。

这是关于任意维空间的内蕴几何，黎曼以二次微分形式定义流形的度量，给出了流形曲率的概念。他还论证了能在球面上实现二维正的常曲率空间。据说黎曼的深刻思想当时只有高斯能理解。经十九世纪 60 年代贝尔特拉米等人的介绍与推进，黎曼的理论才开始为广大数学家领悟，他们对微分不变量的研究，最后导致里奇创立张量理论。

在另一篇论文中，黎曼探讨了将积分概念推广到间断函数上去，提出了现称为黎曼积分的概念。他构造了具有无穷间断点而按他的定义仍可积的函数。寻找这类函数是十九世纪 70～80 年代很时髦的课题。沿着扩展积分概念的方向，后来的数学家得到各种广义积分，最著名的当属二十世纪初出现的勒贝格积分。

1859 年，黎曼研究 ζ 函数的复零点，提出著名的黎曼猜想。黎曼的思想，在几何、分析、数论领域长盛不衰，有力地影响着十九世纪后期以至二十世纪的数学研究。

魏尔斯特拉斯在这一时期继续分析算术化的工作，提出了现代通用的极限定义，即用静态的方法(不等式)刻画变化过程。他构造出处处不可微的连续函数实例，告诫人们必须精细地处理分析学的对象，对实变函数论的兴起起了催化作用。在复变函数论方面，他提出了基于幂级数的解析开拓理论。魏尔斯特拉斯的众多成果出自他任中学教员的时期，到 1859 年出任柏林大学教师后才广为人知。由于他为分析奠基的出色成就，后被誉为“现代分析之父”。

当德国学者在分析与几何领域大放异彩之时，英国学者继续发挥他们在代数中的优势。1854 年，布尔发表了《思维规律的研究》，创立了符号逻辑代数，这是使演绎推理形式化的有力工具。布尔强调数学的本质不是探究对象的内容，而是研究其形式，因而数学不必限于讨论数和连续量的问题，可由符号表示的一切事物都可纳入数学领域。

1855 年，凯莱在研究线性变换的不变量时，系统地提出矩阵概念及其运算法则。矩阵是继四元数之后的又一类不满足乘法交换律的数学对象，它们和群论都是推动抽象代数观点形成发展的重要因素。在凯莱之后，矩阵理论不断完善，不仅成为数学中的锐利武器，还是描述和解决物理问题的有效武器。

基于对矩阵和四元数的认识，凯莱还引进了抽象群的概念，但未立刻引起重视，抽象群论的发展还有待于对各种具体的群作深入的研究。

十九世纪 60 年代末，若尔当担起了向数学界阐明伽罗瓦理论的重任，在发表于 1870 年的《置换论》中，他对置换群理论及其与伽罗瓦方程论的联系作出清晰的总结，为群论在十九世纪最后 30 年间的发展奠定了基础。

在这一时期，数学家对射影几何及非欧几何的认识也日趋深化。1859 年，

凯莱论证了欧氏空间的度量性质并非图形本身的届性，而可以借助某种特定图形按射影概念加以建立，说明欧氏几何是射影几何的一部分。克莱因发挥凯莱的思想，同样论证非欧几何也可以包括在射影几何之内。这样便彻底澄清了射影几何与那些度量几何的关系，铺平了几何公理化发展的道路。

1868 年，贝尔特拉米在伪球面上实现了罗巴切夫斯基几何，在欧氏空间中给出直观上难以想象的非欧几何模型。之后克莱因和庞加莱分别给出各自的非欧几何模型，说明非欧几何本身的相容性(即无矛盾性)与欧氏几何一致，加速了人们接受非欧几何的进程。

在 60 年代末 70 年代初，由高斯在十九世纪初开辟的代数数论研究，经由戴德金和克罗内克等人的推进，形成为内容丰富的现代数学分支。戴德金引进一种代数数类代替库默尔的理想数，重建了代数数域中的惟一因子分解定理，创立了理想论。克罗内克则另辟蹊径，得到相似的概念，并创立有理函数域论，引进在域上添加代数量生成扩域的方法。

这里，需要提及概率论中的几项重要成果。在十九世纪，概率论的发展不象数学其他分支那样突出。自拉普拉斯之后，泊松曾得到著名的泊松分布。更重要的是切比雪夫关于独立随机变量序列的大数律和某类独立随机变量序列的中心极限定理，概率论的系统理论到二十世纪才完成。

综上所述，可看到十九世纪前半叶出现的新思想，在这 20 多年间变得更成熟，形成了众多独立的研究方向或分支学科。

## 数学公理化运动的初创期

这一阶段从十九世纪七十年代初到十九世纪末。数学经过十九世纪前七十年的发展，讨论基础问题的条件已趋成熟。与以前的世纪不同，十九世纪的数学家最终选择算术而不是几何作为本门科学的基础。

几何中普吕克有关齐次坐标的研究，分析中魏尔斯特拉斯的静态方法都反映了这种倾向。但是算术中最基本的实数概念始终是模糊的。柯西的实数定义有严重缺陷，犯了循环定义的错误。

1872 年，魏尔斯特拉斯、康托尔、戴德金和其他一些数学家，在确认有理数存在的前提下，通过不同途径给无理数下了精确定义。又经过不少数学家的努力，最终由意大利学者皮亚诺完成了有理数理论。1881 年，他在《算术原理新方法》中，给出了自然数的公理体系，由此可从逻辑上严格定义正整数、负数、分数、无理数。

康托尔在探讨实数定义的同时，研究了傅里叶级数收敛点集的结构，1874 年起发表一系列有关无穷集合的文章，开创了集合论这一基础性的数学分支。康托尔的成果是高度独创性的，他把无穷集本身作为研究对象，通过一一对应方法，区分无穷集的大小，定义了集合的基数(或称势)，引进序型、序数以及一些属于拓扑学的基本概念。他提出了著名的连续统假设。

康托尔的工作影响十分深远：首先是重新唤起人们对实无穷的研究，开拓

了点集拓扑的领域；第二，使人们把函数的定义域建立在一般的点集之上，推动了测度论和泛函分析的研究；第三，由于集合论的内在矛盾，激发起对数理逻辑和数学基础的深入研究。

但集合论问世之初，曾遭到一些著名数学家的激烈反对，以至康托尔晚年处于精神崩溃状态。到十九世纪末，阿达马等证实了康托尔的理论在分析学中的重要应用，才使这一理论得到转机，终于成为二十世纪数学研究的一个基础。

分析的严格化以皮亚诺的自然数公理体系的建立而告一段落。这种公理化的倾向也同样在其他数学分支蔓延。弗雷格提出了逻辑公理体系，帕施得到了射影几何的公理体系。最著名的是希尔伯特于 1899 年在《几何基础》中阐述的欧几里得几何的公理系统。他考虑了公理系统的独立性、相容性和完备性，并证明欧几里得几何的相容性可归结为算术的相容性。

希尔伯特的工作掀起了公理化的热潮：一方面，数学家为各数学分支建立公理体系；另一方面，通过略去否定或其他方式改变所论体系的公理来探索新体系、新问题。公理化运动并没有限制新思想的萌生和对各种具体课题的研究，后者始终是数学发展中最活跃的因素。群论的应用在这一时期特别引人瞩目，1872 年，克莱因受聘任埃尔朗根大学教授时，发表题为《关于近代几何研究的比较考察》的讲演(即著名的埃尔朗根纲领)，他指出每种几何可由特定的变换群来刻画，各种几何的研究内容是在相应的变换群下的不变量，一种几何的子几何则是研究原变换群的子群的不变量。根据变换群的观点，克莱因对几何进行了系统分类，揭示了群的概念在几何中的统一作用(不包括一般的黎曼几何和代数几何)开拓了研究几何的一种有效的方法。克莱因的工作体现了数学专门化趋势中蕴含的统一因素。

1874 年，挪威数学家李在研究常微分方程与保持这些方程的解不变的变换群之间的关系时，创建了连续变换群理论(现称李群)以及相应的代数(现称李代数)。有了对具体的群的广泛研究，抽象群论获得了新生。1882 年，德国数学家迪克受凯莱工作的鼓舞，引进用生成元和生成元之间关系来定义群的抽象观点，开始抽象群论的系统研究。与此相伴的是分析与经典代数方法对群论的应用，即群的表示理论应运而生。

组合拓扑学作为一门学科在十九世纪末登上了数学舞台。庞加莱是这一领域的主要奠基者。庞加莱是当时领头的数学家之一，兴趣广泛，研究涉及众多数学分支以至天体力学和物理科学。在探讨描述行星运动的微分方程周期解时，他采用了拓扑观点分析奇点及积分曲线的结构，开创了微分方程定性理论。在研究一般”维图形的结构时，引进了一套系统的组合方法，为组合拓扑奠定了基础。拓扑和抽象代数的观点和方法成为二十世纪最有影响的研究手段。

与庞加莱齐名的另一位著名数学家是希尔伯特。他不仅积极创导了公理化方法，而且特别重视数学中单个重大问题的研究，认为这是数学活力之所在。他本人就通过解决一系列具体问题，得到许多重要方法。十九世纪末，他发表了两个报告。《数论报告》系统总结了代数数论的全部成果，开辟了类域论的研究方向。

1900 年，在第二届国际数学家大会上，希尔伯特作了影响深远的题为《数学问题》的报告，成为迎接二十世纪挑战的宣言。

在数学分成几十个分支各自独立发展的形势下，希尔伯特坚信数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力正是在于各部分之间的联系。在十九世纪末，领头数学家对数学前途充满了信心，与十八世纪末的情景形成鲜明对照。庞加莱和希尔伯特的业绩展示了二十世纪数学大发展的曙光。