欺骗眼睛的几何问题

生活中我们常常相信亲眼所见，但又常常为自己的眼睛所骗，魔术就是一个很好的例子。数学中也有这种欺骗我们眼睛的奇妙的数学魔术，请看下面问题 1 这两个图形，如果将图 1 中的四块几何图形裁剪开来重新拼接成图 2，我们将会发现，与图 1 相比，图 2 多出了一个洞！这怎么可能呢？理性会提出这样的疑问。奥妙何在我们姑且按下不表，让喜欢思考的同学先动动脑子。

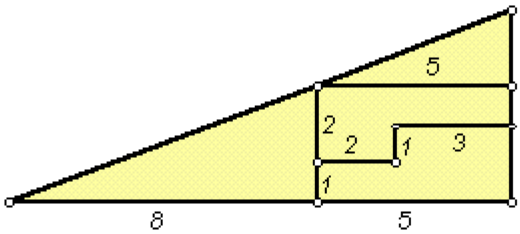

图 1

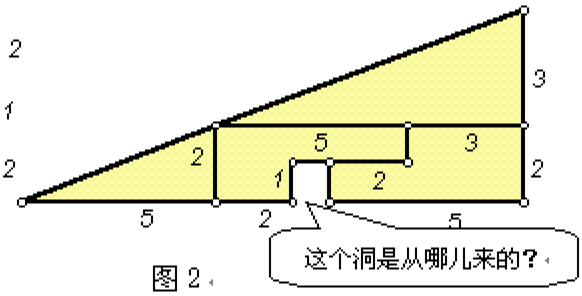

图 2

我们还是来看一个更简单的问题 2 吧，将图 3 中面积为 13×13=169 的正方形裁剪成图中标出的四块几何图形，然后重新拼接成图 4，计算可知长方形的面积为 8×21＝168，比正方形少了一个 单位的面积，真不可思议！

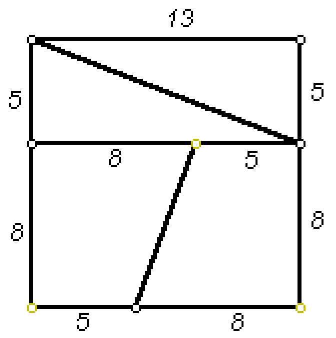

图 3

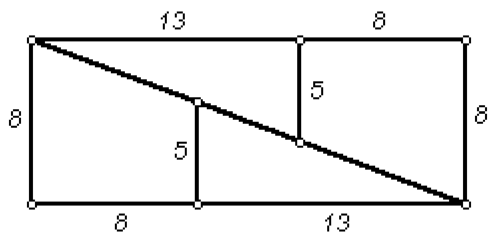

图 4

这两个问题是这样的令人惊奇和难以理解，值得我们花费一些时间动手按照所说的剪裁方法做一做。以问题 2 为例，我们在白纸上将正方形量好画出，剪成四块，重新安排后拼成长方形，除非图形做得很大并且作图和剪裁都十分精确，我们一般是不会发现拼接成的长方形在对角线附近发生了微小的重叠，正是沿对角线的微小重叠导致了一个单位面积的丢失。要证实这一点我们只要计算一下长方形对角线的斜率和正方形拼接各片相应边的斜率，比较一下就会清楚了。

问题 2 中涉及到四个数据 5、8、13 和 21，有一定数学基础的同学会认出这是著名的斐波那契数列中的四项，斐波那契数列的特征是它的每一项都是前两项之和：1，1，2，3，5，8，13，21，34，……。我们还可以使用这个数列中的其他相邻四项来试验这个过程，无论选取哪四项，都可以发现正方形和长方形的面积是不会相等的，有时正方形的面积比长方形多一个单位面积，有时则正好

相反。多做几次上述实验，我们就会得出斐波那契数列的一个重要性质：这个数列任意一项的平方等于它前后相邻两项之积加 1 或减 1。用公式表示就是：$f_n^2 = f_{n+1} \cdot f_{n-1} \pm 1$。其中 f_n^2 表示正方形的面积，$f_{n+1} \cdot f_{n-1}$ 表示长方形的面积。知道了这个事实，我们就可以自己构造类似于问题 2 的几何趣题。

上面的这个斐波那契数列是以 1，1 两数开始的，广义的斐波那契数列可以从任意两数开始。比如说，用广义斐波那契数列 2，2，4，6，10，16，……做上述试验，就会多得或丢失四个单位的面积。如果用 a、b、c 表示广义斐波那契数列的相邻三项，以 x 表示“得”或“失”的数字，则下列两式成立：$\begin{cases} a+b=c \\ b^2 = ac \pm x \end{cases}$

我们还可以来研究这样一个有趣的问题：把正方形按上述方法剪成四块，是否会拼接成一个与它面积相等的长方形？要回答这个问题，可以令方程组中的 x 等于零，再解之得唯一正解是：$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$。其中 $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 恰是著名的黄金分割比，通常用 来表示，它是一个无理数，等于 1.618033……。这就是说，唯一的每项平方等于前后相邻两项之积的斐波那契数列是：1，ϕ，ϕ^2，ϕ^3，ϕ^4，……。要证明它的确是斐波那契数列，只要证明它等价于数列 1，ϕ，ϕ+1，2ϕ+1，3ϕ+2，……就可以了。只有用这个数列相邻项数表示的长度来分割正方形，才可以拼出面积不变的长方形。

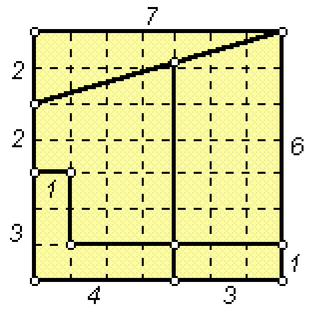

图5

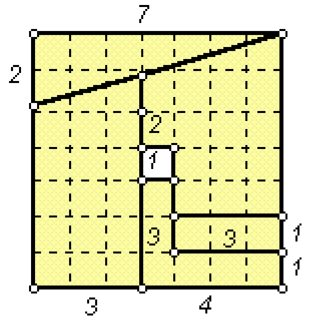

图6

我们再回到问题 1，题中涉及到的数据 1，1，2，3，5，8，13 恰是斐波那契数列的前七项，因此问题 1 实际上是问题 2 的一个复杂化版本，计算一下图中两个大小三角形斜边的斜率，那么一开始的疑问已不讲自明。

最后再给喜欢思考的同学提出一个与前两个问题略有不同的问题 3，图 5 这个正方形按图中标出的数据分割成了五块几何图形，剪开后重新拼接成图 6，奇怪，又多出了一个洞，这次斜线处并无叠合，少掉的一个单位面积哪里去了呢？这个问题最初是由美国魔术师保罗?卡瑞提出的，虽然它曾经难倒了许多美国人，但相信它难不倒聪明的中国学生。为帮助大家思考，提示一下：不要忘了计算！最后送给大家一句华罗庚教授的话作为本文的结束，“数缺形时少直观，形少数时难入微”。